Schriftliche Reifeprüfung aus MATHEMATIK
Haupttermin 2007/08 8A(GYM)

1) Für eine Schar von Funktionen gilt: $x \rightarrow \frac{a + b \ln(x)}{x}$ ($a, b \neq 0; a, b \in \mathbb{R}$).

a) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1 + 2 \ln(x)}{x}$ eine Termdarstellung jener Funktion ist, die den **Hochpunkt** $H(\sqrt{e} \mid \frac{2}{\sqrt{e}})$ hat!

b) Bestimmen Sie die größtmögliche **Definitionsmenge** und untersuchen Sie diese Funktion auf **Nullstellen, Extremstellen, Art der Extrema** und **Wendepunkte**.

[Kontrolle für die 1. und 2. Ableitung: $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^2}$; $f''(x) = \frac{-4 + 4 \ln(x)}{x^3}$]

c) Wie lautet die **Gleichung der Wendetangente**?

d) Zeichnen Sie den **Funktionsgraph** in **(0/3)**!

e) Berechnen Sie die vom **Funktionsgraph**, der **x-Achse** und den Geraden **x=1** und **x=e** eingeschlossene **Fläche**!

[Lös.: a=1, b=2; D= $\mathbb{R}^+$; N(0,61|0); H(1,65|1,21); W(2,7|1,1); $t_w: y = -0,14x + 1,47$; A=2FE]

2) **A) Philip** und **Christopher** fahren jeweils mit dem PKW auf zwei einander normal kreuzenden Straßen. **Philip** hat vom Kreuzungspunkt der Straßen(=Kreuzung) einen Abstand von **a=190 m** und fährt von der Kreuzung mit der Geschwindigkeit **v₁=10 m/s** weg. **Christopher** hat auf der anderen Straße von der Kreuzung den Abstand **b=300 m** und fährt in Richtung der Kreuzung mit der Geschwindigkeit **v₂=15 m/s**. Fertigen Sie eine **Skizze** an! **Wann** ist die **Entfernung** der beiden **am kleinsten**? **Wie weit** sind sie dann voneinander **entfernt**?

[Lös.: t=8 Sek.; d=324,5 m]

2) **B) Erläutern** Sie den Unterschied zwischen **Differenzen-** und **Differentialquotient(Definition, Interpretation und Deutung** mit Hilfe einer Skizze)! Geben Sie **je ein Beispiel** an, welche Bedeutung die **erste und die zweite Ableitung** einer Funktion in der **Geometrie** und in der **Physik** haben können!

3) **A) Das Medikament MTR(MATHETRANQUILIZER; lat. tranquillare = beruhigen)** hat eine **Halbwertszeit** von **sieben Stunden**. Um die beruhigende Wirkung bei Mathematikschularbeiten zu optimieren, ist der Zeitpunkt der Einnahme und die richtige Dosierung des Medikamentes sehr wichtig. **Eine Tablette** beinhaltet **0,6 g** des Wirkstoffes.

- **Leiten** Sie die **Zerfallskonstante λ** her!
- Geben Sie die **prozentuelle Abnahme** auf **1 Dez.** genau an!
- Stellen Sie eine **Zerfallsformel** auf **zwei Arten** auf(mit und ohne Verwendung der Euler'schen Zahl)!

Julia nimmt am Tag vor der Mathematikmatura um **20 Uhr** eine Tablette zu sich. Um **7 Uhr morgens** nimmt sie eine weitere Tablette zu sich. Wie viel Gramm des Wirkstoffes hat Julia **um 12 Uhr** noch im Körper?

Berechnen Sie, **wann nach der Verabreichung der ersten Tablette** im Körper von Julia **weniger als 0,1 g** des Wirkstoffes nachzuweisen wäre?

[Lös: $N(t) = 0,6 \cdot 0,905724^t$; $N(t) = 0,6 \cdot e^{-0,099021t}$; 9,4 %; 12 Uhr : 0,4888g;

ca. 18 Stunden]

3)B) Eine **unendliche Zahlenfolge** b_n ist gegeben durch $\left\langle \frac{2}{5}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{9}; -\frac{10}{11}; \dots \right\rangle$.

a) **Beweise** Sie, dass $b_n = \frac{6-4n}{3+2n}$ die **Abbildungsgleichung** der Folge ist!

b) Untersuchen Sie das **Monotonieverhalten von b_n** (Vermutung, Beweis!!!)

c) Bestimmen Sie den **Grenzwert b** und jenen **Index m** , von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung **$U(b; 0.002)$** liegen! **Interpretieren** Sie das Ergebnis und formulieren Sie eine entsprechende **Antwort!**

[Lös.: b_n streng monoton fallend: $30 > 6$; $b = -2$; $m = 2999$]

4)A) **Paul**, das Tennisgenie der 8A, trainiert beinahe täglich in der **HOSKA (Horst Skoff Akademie)**. Zum regelmäßigen Training gehört seit Jahren auch das Üben des Aufschlages (Service). Paul trifft **70 %** seiner ersten Aufschläge in das Feld des Gegners.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Paul bei einer Serie von **4 Aufschlägen**
 - i) **mindestens drei** erste Aufschläge ins Feld trifft,
 - ii) **genau zwei** erfolgreiche Versuche hat? [Lös.: 65,2%; 26,5%]
- **Wie oft** muss Paul aufschlagen, damit er mit **90%iger** Wahrscheinlichkeit mindestens einmal einen ersten Aufschlag ins Feld trifft? (Ansatz mittels **Ungleichung!!!**) [Lös.: $n=2$]
- Klassenkollege **Max** spielt mit Paul ein Tennisdoppel. Nach dem gewonnenen Doppel analysieren die beiden ihre Aufschläge. **Paul** setzte **65 %** aller ersten Aufschläge der beiden in das gegnerische Feld, **Max** nur **35 %**. **Paul** erzielte mit **30 %** seiner ersten Aufschläge ein **Ass** (=Ein Ass (engl.: Ace) ist ein Aufschlag, bei dem der geschlagene Ball vom Gegner nicht erreicht werden konnte), **Max** hatte eine **Assquote** von **10%** beim ersten Aufschlag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielte einer der beiden mit einem ersten Aufschlag ein Ass? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammte ein Ass von Paul? Zeichnen Sie ein **Baumdiagramm!** [Lös.: 23%; 84,8%]

4)B) Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes

- **mehr als 3000 g**
- **weniger als 2500 g**
- **zwischen 4000 und 5000 g** wiegt? [Lös.: 59,9%; 18,9%; 14,7%]

Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es

- zu den **15% schwersten** [Lös.: mehr als 4030 g]
- zu den **25% leichtesten** gehört? [Lös.: weniger als 2660 g]
- In welchem **symmetrischen Bereich** $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ liegen die Gewichte von **90%** aller Neugeborenen? (**Runde auf 10 g!**) [Lös.: 1880 g; 4520 g]

Überlegen Sie den **Ansatz** jeweils anhand einer **Skizze!**