Schriftliche Reifeprüfung aus MATHEMATIK
Haupttermin 2009/10 8S(SPORT)

1) Für eine Schar von Funktionen gilt: $x \rightarrow a x e^{bx+1}$ ($a, b \neq 0; a, b \in \mathbb{R}$).

- a) Beweisen Sie, dass $f(x) = 4xe^{-x+1}$ eine Termdarstellung jener Funktion ist, die den **Hochpunkt H(1|4)** hat!
- b) Bestimmen Sie die größtmögliche **Definitionsmenge** und untersuchen Sie diese Funktion auf **Asymptoten, Nullstellen, Extremstellen, Art der Extrema und Wendepunkte!**
[Kontrolle für die 1. und 2. Ableitung: $f'(x) = 4e^{-x+1}(1-x)$; $f''(x) = 4e^{-x+1}(x-2)$]
- c) Wie lautet die **Gleichung der Wendetangente** und welchen **Winkel α** schließt diese mit der **x-Achse** ein?
- d) Zeichnen Sie den **Funktionsgraph in [-0,5|6]**! (1 E = 1 cm)
- e) Berechnen Sie die vom **Funktionsgraph**, der **x-Achse** und der Geraden **x=2** eingeschlossene **Fläche!**

[Lös.: $a=4, b=-1; D=\mathbb{R}$; $a: y=0; N(0|0); H(1|4); W(2|2,94); t_w: y = -1,47x + 5,88; \alpha = -55,77^\circ; A=6,46FE$]

2)A) Herr **Kraxner** hat zu Jahresbeginn ein Sparbuch eröffnet, dessen Einlagen mit **3% p.a.** (25 % KEST ist noch zu berücksichtigen!) verzinst werden. Wie groß ist sein Sparguthaben **am Ende des 10. Jahres**, wenn er **zu Beginn jeden Monats 400 €** einlegt? (Zeitgerade, allgemeine Herleitung!!!) [Lös.: 53 809,33 €]

2)B) Eine **Schuld von 120.000 €** soll bei **6% Zinseszins** (25 % KEST wurde schon berücksichtigt!) durch eine in 5 Jahren beginnende vorschüssige Jahresrente durch 25 Jahre getilgt werden. Wie hoch ist die **Rate R**? (Zeitgerade, allgemeine Herleitung!!! Der Term für R ist explizit anzugeben!) [Lös.: 11 851,13 €]

2)C) Ein **Trainingsanzug** kostet in einem Klagenfurter Sportgeschäft **80 €** und wird **wöchentlich um 10% billiger**.

- a) Beschreiben Sie diesen Vorgang durch eine **mathematische Gleichung!**
[Lös.: $K(t) = 80 \cdot 0,90^t$; exponentielle Abnahme]
- b) **Wann** kostet der Pullover nur mehr **die Hälfte**? Warum würde eine Änderung des Ausgangspreises das Ergebnis dieser Fragestellung nicht beeinflussen? Runden Sie auf ganze Wochen! [Lös.: 7 Wochen; unabhängig vom Ausgangspreis]
- c) **Nach wie vielen Wochen** ist der Preis auf **20 €** zurückgegangen? Runden Sie auf ganze Wochen! [Lös.: 13 Wochen]
- d) Melanie und Stefanie wollen warten, bis der **Trainingsanzug gratis** angeboten wird. Haben die beiden eine Chance, den Trainingsanzug gratis zu erstehen? Finden Sie eine **mathematische Begründung!** [Lös.: Nein; keine Nullstelle; positive x-Achse ist Asymptote]
- e) Vergleichen Sie das mathematische Modell in a) mit folgender Aussage des Händlers:

„Der Trainingsanzug wird wöchentlich um 10 € billiger!“

Stellen Sie ebenfalls eine **mathematische Gleichung** auf und skizzieren Sie beide Graphen! [Lös.: $K_1(t) = 80 - 10 \cdot t$; lineare Abnahme]

3)A) Ein Tennisverein soll einen neuen Kabinentrakt mit Duschen bekommen. Dazu soll vom **Rohbau R** des Kabinentraktes, der **30 m** vom **nächstgelegenen Punkt P** einer **geradlinigen Zufahrtsstraße** entfernt liegt, eine Wasserzuleitung zu einem an der Straße liegenden **Wasserhauptverteiler W** gegraben werden (Entfernung **PW=40 m**). Zu welcher Stelle **A (Abzweigung)** der Straße müsste die

Wasserzuleitung gegraben werden, damit die **Grabungskosten**, die im **Gelände 3 mal mehr** als entlang der Straße (**Kosten von k €/m**) betragen, **möglichst gering** sind? Fertigen Sie eine **Skizze** an!

- Berechnen Sie die **Länge der Wasserzuleitung!**
- Welche **Kosten** entstehen?
- Die Baufirma **erhöht** im März die Kosten für Grabungsarbeiten **um 15 %**. Nach massiven Protesten des Bauherrn gewährt die Firma jedoch bei der Abrechnung **15 % Preisnachlass**. **Wer profitiert** von dieser Regelung? Deuten und interpretieren Sie das Ergebnis!

[Lös.: $s=61,21$ m; $K=124,85$ k €; Bauherr profitiert]

3)B)Zur Eröffnungsfeier des neuen Kabinentraktes stellt der Präsident des Tennisvereines ein überdimensioniertes Bierfass zur Verfügung. Das **Fass** ist **8 dm lang**, sein **Durchmesser** beträgt in der **Mitte 8 dm** und am **Rand 6 dm**. Die Fassdauben haben die Form einer **Parabel**. Wie groß ist das **Volumen** dieses **Fasses**(gerundet auf ganze Liter)? (Anleitung: Zeichnen Sie das Fass so in das Koordinatensystem, dass der Ursprung im Mittelpunkt liegt und die x-Achse die Rotationsachse ist, und ermitteln Sie die Gleichung der *Parabel* $y = ax^2 + b$.) Fertigen Sie eine **Zeichnung** im **Maßstab 1:10** an! [Lös.: ca. 340 Liter]

4)A)Thomas übertrifft im Weitsprungtraining **bei drei von fünf Sprüngen** eine Weite von fünf Metern.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Thomas bei einer Serie von **sechs Sprüngen mindestens vier** Sprünge über fünf Meter gelingen? [Lös.: 54,4 %]
- **Wie oft** muss Thomas im Training springen, damit er mit **99%iger** Wahrscheinlichkeit mindestens einmal fünf Meter überspringt? (Ansatz mittels **Ungleichung!!!**) [Lös.: 6]
- Klassenkollege **Lukas** trainiert mit **Thomas** und absolviert **zwei Drittel** aller Trainings sprünge. **Lukas** hat dabei **20 % Fehlversuche**, **Thomas** übertritt den Absprungbalken **bei jedem vierten Versuch**. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein **gültiger Versuch** erzielt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammte ein **Fehlversuch** von **Lukas**? Zeichnen Sie ein **Baumdiagramm!** [Lös.: 78,3 %; 61,5 %]

4)B)Die **Sprungweite** der **Schüler der 8S** bei der Sportmatura sei normalverteilt mit $\mu=510$ cm und $\sigma=25$ cm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler der Sportklasse

- **kürzer als 460 cm**
- **weiter als 535 cm**
- **zwischen 480 und 520 cm springt?**

Wie weit muss ein Sportschüler springen, damit er

- zu den **10% weitesten**
- zu den **20% kürzesten** gehört?
- In welchem **symmetrischen Bereich $[\mu-\epsilon, \mu+\epsilon]$** liegen die Sprungweiten von **95%** aller Sportschüler?

Überlegen Sie den **Ansatz** jeweils anhand einer **Skizze** und formulieren Sie eine entsprechende **Antwort!**

[Lös.: 2,28 %; 15,87 %; 54 %; mindestens 542 cm; höchstens 489 cm; zwischen 461 cm und 559 cm]