

Schriftliche Reifeprüfung aus MATHEMATIK
Haupttermin 1999/00 8B

1) Für eine Schar von Funktionen gilt: $x \rightarrow a \cdot \ln(x) - b \cdot \ln^2(x)$ ($a \neq 0, b \neq 0; a, b \in \mathbb{R}$).

a) Beweisen Sie, dass $f(x) = 4 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \ln^2(x)$ eine Termdarstellung jener Funktion ist, die den Hochpunkt $H(e/2)$ hat!

b) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge und untersuchen Sie diese Funktion auf Nullstellen, Extremstellen, Art der Extrema und Wendepunkte. [$D = \mathbb{R}^+$; $N_1 = (1|0)$, $N_2(e^2/0)$; $H(e/2)$; $W(e^2/0)$]

c) Wie lautet die Gleichung der Wendetangente? [$t_w: y = -0,54x + 4$]

d) Zeichnen Sie den Funktionsgraph in $[e^{-1}/8]$! (1E=1cm)

e) Berechnen Sie die vom Funktionsgraph und der x-Achse eingeschlossene Fläche im 1. Quadranten! [$8E^2$]

2) A) Unter **Radioaktivität** versteht man das Zerfallen von Atomen. Die Anzahl N der radioaktiven Atome verringert sich mit der Zeit t . Diese zeitliche Abnahme der Atome wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$ (λ heißt Zerfallskonstante und ist charakteristisch für das zerfallende Element).

a) Erstellen Sie das sogenannte Zerfallsgesetz, indem Sie die Differentialgleichung lösen. Bestimmen Sie die auftretende Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung, dass zum Zeitpunkt $t=0$ N_0 Atome vorhanden waren.

b) Leiten Sie die Formel $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ für die Halbwertszeit her!

c) Bestimmen Sie die Zerfallskonstante λ (6 Dez. genau) für das Kohlenstoffisotop C_{14} ($\tau = 5600$ Jahre), welches bei Altersbestimmungen eine wichtige Rolle spielt!
[$\lambda = 0,000124$]

d) Wieviel Gramm C_{14} sind nach 4000 Jahren von einer Ausgangsmenge von 100 Gramm noch übrig? (2 Dez.) [60,90 Gramm]

e) Bestimmen Sie das Alter einer Substanz, welche heute nur noch 5% ihres ursprünglichen Gehaltes an C_{14} aufweist. Runden Sie auf volle Jahre! [24159 Jahre]

B) Eine unendliche Zahlenfolge b_n ist gegeben durch $\left\langle \frac{1}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{5}{10}; -\frac{9}{12}; \dots \right\rangle$.

f) Beweisen Sie, dass $b_n = \frac{7-4n}{4+2n}$ die Abbildungsgleichung der Folge ist!

g) Bestimmen Sie den Grenzwert b und jenen Index m , von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung $U(b; 0.002)$ liegen! Formulieren Sie eine entsprechende Antwort!
[$m=3749$]

3) Gegeben sind die Ellipse k_1 mit der Gleichung $3x^2 + 4y^2 = 12$ und die Parabel k_2 mit der Gleichung $y^2 = \frac{9}{4}x$.

- a) Berechnen Sie die Größe des Winkels α , den die Tangenten im Schnittpunkt $S(x_1/y_1 > 0)$ miteinander einschließen! [63,43°]
- b) Das von beiden Kurven begrenzte (kleinere) Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Drehkörpers! Fertigen Sie eine Skizze an! [7,46 E³]
- c) Berechnen Sie mittels der Integralrechnung den Flächeninhalt der Ellipse k_1 ! [$2\sqrt{3}\pi E^2$]

4)A)Beim Schulball des BG/BRG Lerchenfeldstraße werden insgesamt 1000 Lose ausgegeben, 300 davon sind Gewinnlose.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter zehn gekauften Losen
 - i)mindestens drei [61,7%]
 - ii)höchstens zwei Gewinnlose befinden? [38,3%]
- b) Wie viele Lose muss man kaufen, damit man mit 90%iger Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Gewinn rechnen kann? (Ansatz mittels Ungleichung!!!) [n=7]
- c) Ein Lehrer dieses Gymnasiums bezieht 50% seiner Lose von einer Schülerin der 8A(32% Nieten), 30% seiner Lose von einer Schülerin der 8B(44% Nieten) und 20% seiner Lose von einer Schülerin der 8C(52% Nieten). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffenes Los des Lehrers eine Niete ist? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein Gewinnlos von einer Schülerin aus der 8B? Zeichne ein Baumdiagramm! [27,8%]

B)Eine Abfüllanlage füllt Waschmittelpakete. Das Gewicht der Pakete sei normalverteilt mit $\mu = 500 \text{ g}$ und $\sigma = 2,5 \text{ g}$. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gewicht der Waschmittelpakete

- d)501g übersteigt, [34,5%]
- e)höchstens um 3 g vom Sollwert abweicht! [77%]
- f)Wie muss man die Toleranzgrenzen festsetzen, damit man höchstens 3% Ausschuss erhält? (Die Abweichung ε vom Erwartungswert ist explizit zu berechnen!) [$\varepsilon = 5,425$]

Lösungen in [...].!